$\boxed{1}$

(1)

$mg\cos\theta$

解説

図参照

(2)

$\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$

解説

糸の張力とおもりの変位の向きのなす角は 90° だから，

張力と変位の内積，すなわち張力がおもりにする仕事は 0 である。

これと与えられた条件より，おもりの運動の力学的エネルギーが保存される。

おもりの最下点と最高点における力学的エネルギー保存について，

最下点を重力の位置エネルギーの基準位置とすると，

$$\frac{1}{2}mv^2+0=0+mgl(1-\cos\alpha) \quad \therefore v=\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$$

(3)

$mg(3-2\cos\alpha)$

解説

非慣性系で考えると，おもりに働く力のつり合いより，

「糸がおもりを引く力＝おもりに働く重力＋おもりに働く遠心力」より，

$$\begin{aligned}S&=mg+m\cdot\frac{v^2}{l}\\&=mg+m\cdot\frac{2gl(1-\cos\alpha)}{l}\\&=mg(3-2\cos\alpha)\end{aligned}$$

慣性系で考えると，おもりの中心方向の運動方程式より， $m\cdot\frac{v^2}{l}=S-mg$

$$\begin{aligned}\therefore S&=mg+m\cdot\frac{v^2}{l}\\&=mg+m\cdot\frac{2gl(1-\cos\alpha)}{l}\\&=mg(3-2\cos\alpha)\end{aligned}$$

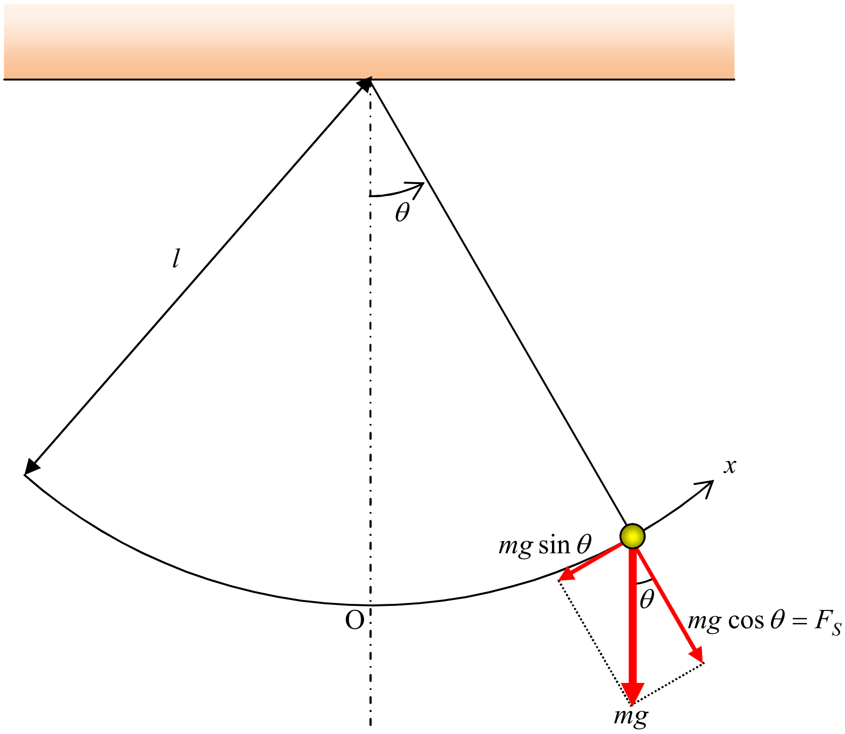
(4)

$-mg\sin\theta$

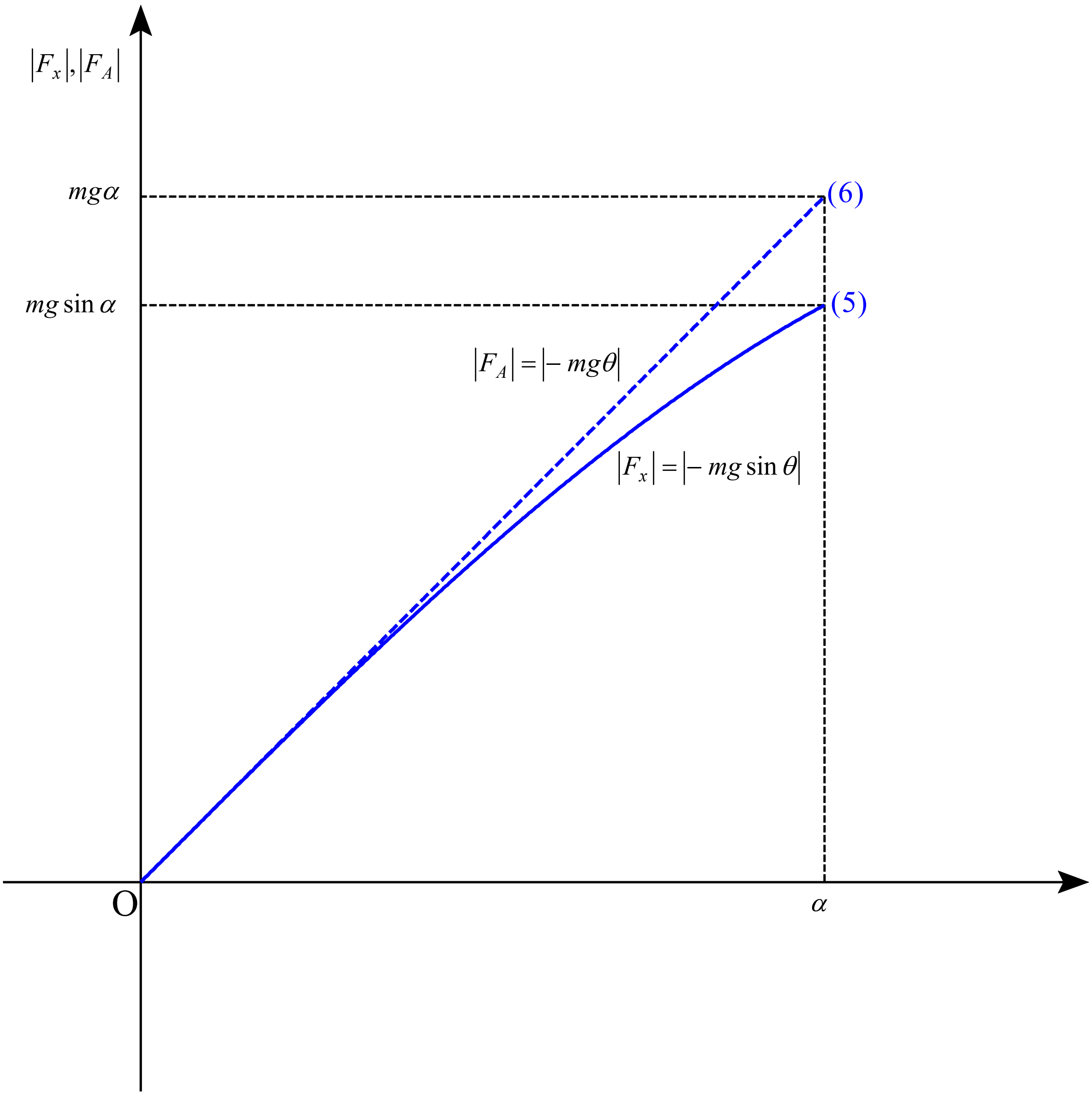
解説

おもりに働く重力の円周方向の力の大きさは，図より， $mg\sin\theta$

右向きを正とするから， $F_x = -mg\sin\theta$



(5)・(6)

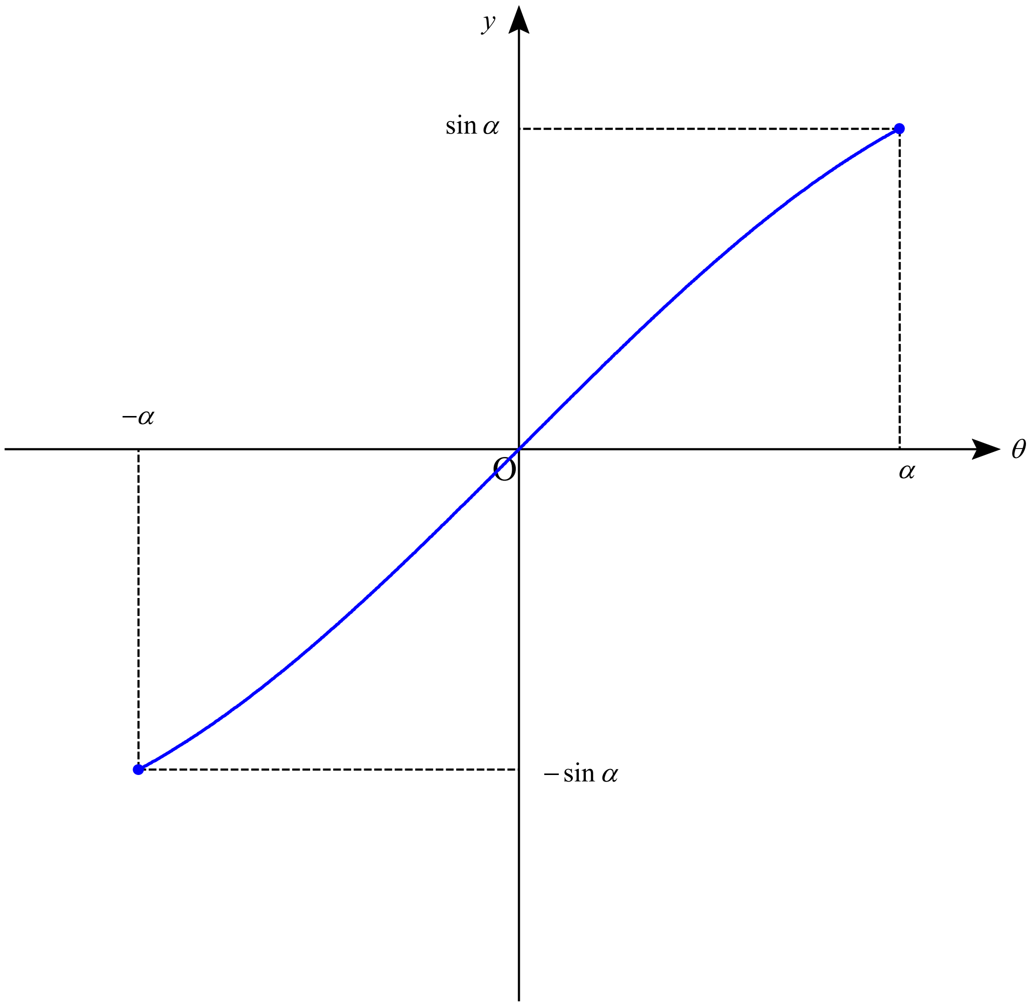


(7)

$F_x=-mg\sin\theta\ (-\alpha\le\theta\le\alpha)$ は奇関数だから，これを多項式で近似したとき，
その多項式も奇関数でなければならない。
よって，多項式の偶関数の項である θ^2 の項がない。
(5)と(6)のグラフより $\sin\theta<\theta$ であるから，$\theta+k\theta^3$ が $\sin\theta$ のよりよい近似であるためには，
$\sin\theta<\theta+k\theta^3<\theta$ であればよい。よって，その必要条件は $k<0$，すなわち k は負である。

解説

「左右に振動することから」は「θ の定義域が $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ 」であることによる。



別解

$\sin\theta \approx a + b\theta + c\theta^2 + d\theta^3$ とすると，$\theta = 0$ のとき $0 \approx a$ より，$a = 0$

両辺を θ について微分すると，$\cos\theta \approx b + 2c\theta + 3d\theta^2$ ・・・①

これに $\theta = 0$ を代入すると，$1 \approx b$ より，$b = 1$

①の両辺を θ について微分すると，$-\sin\theta \approx 2c + 6d\theta$ ・・・②

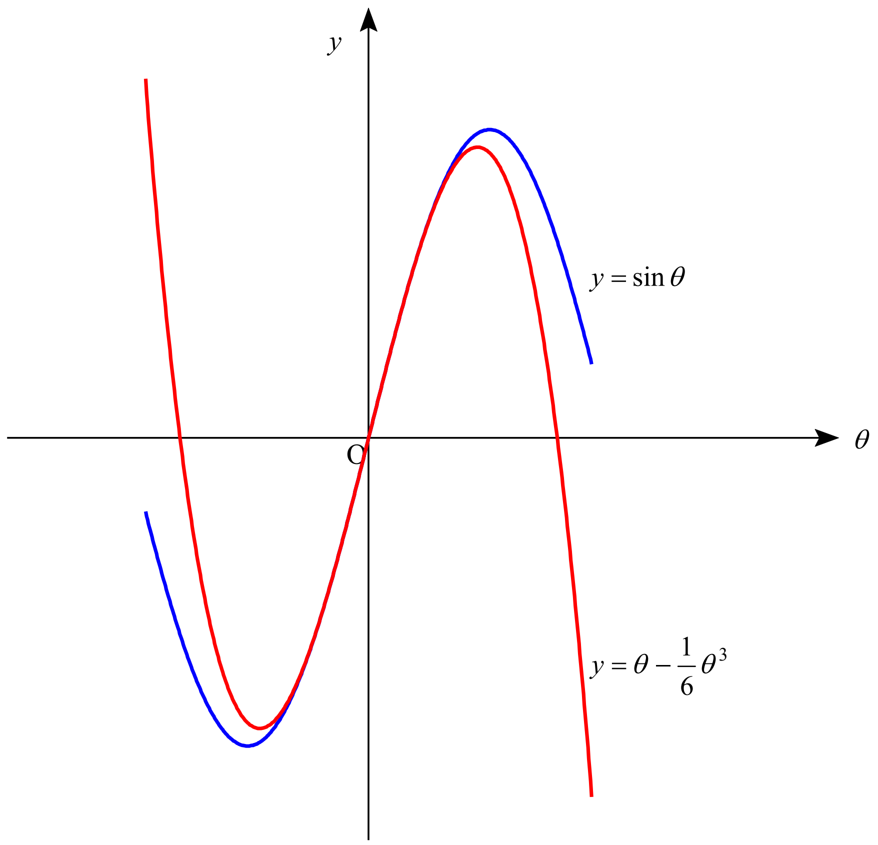
これに $\theta = 0$ を代入すると，$0 \approx 2c$ より，$c = 0$

②の両辺を θ について微分すると，$-\cos\theta \approx 6d$

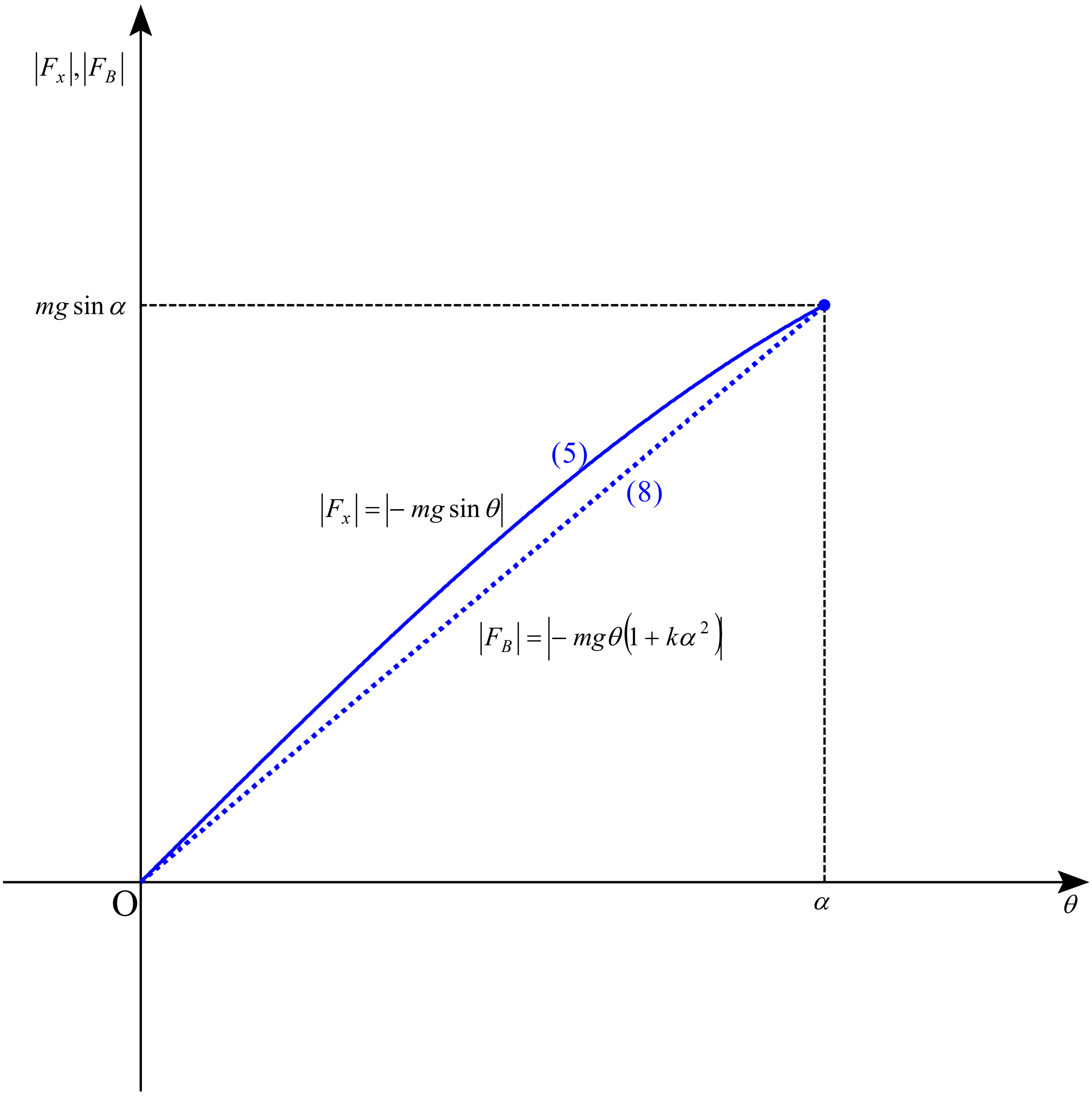
これに $\theta = 0$ を代入すると，$-1 \approx 6d$ より，$d = -\dfrac{1}{6}$

よって，$\sin\theta \approx \theta - \dfrac{1}{6}\theta^3$ ゆえに，θ^2 はなく，また $k = -\dfrac{1}{6}$ より，k は負

しかし，これは θ^2 の項がない“意味”を説明しているのかというと，あやしい。


y
θ
O
y = sin θ
y = θ − 1/6 θ³

(8)

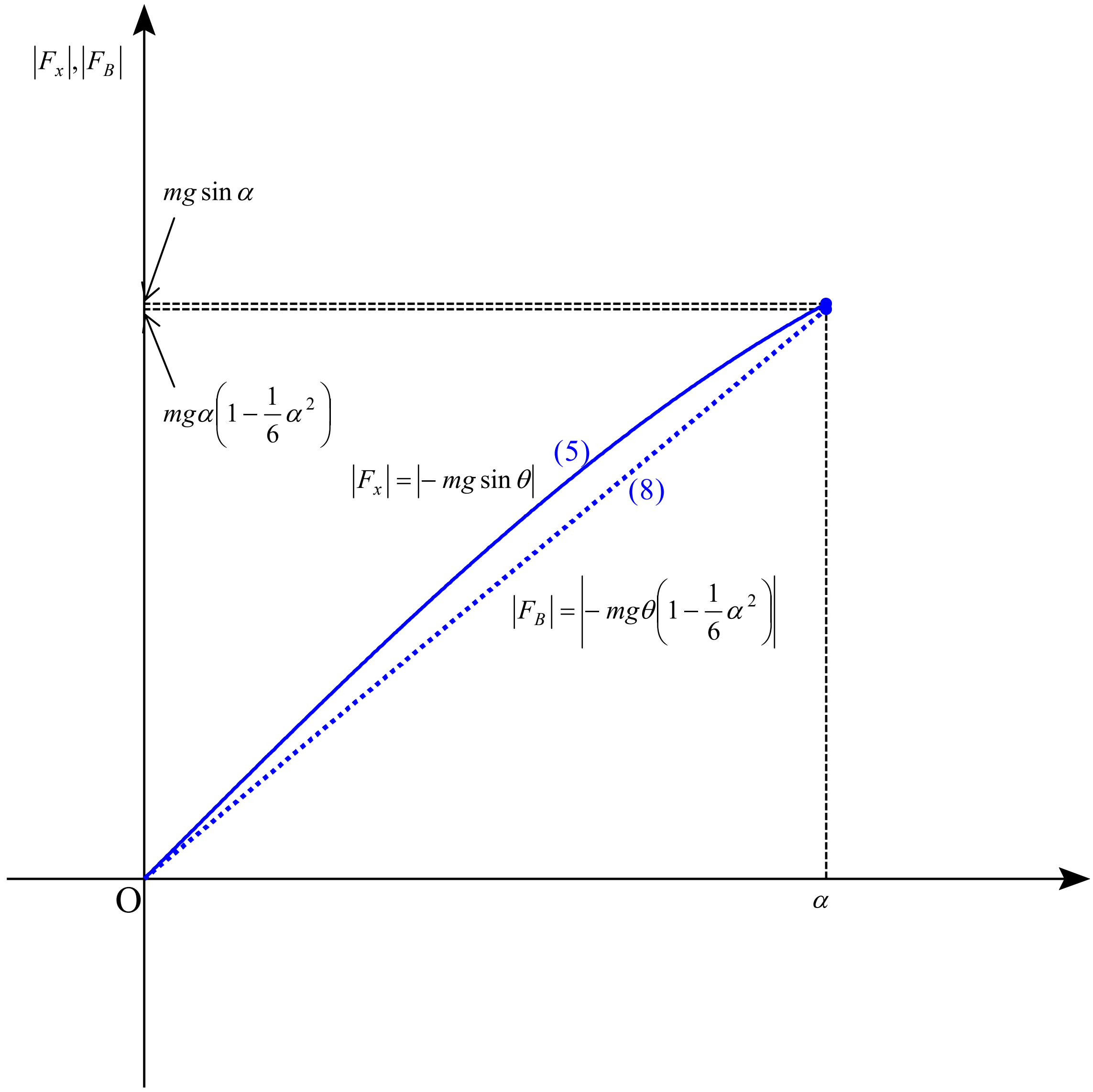


解説

$\sin\theta \approx \theta(1+k\theta^2)$ より， $\sin\theta \approx \theta(1+k\alpha^2)$ は $\theta=\alpha$ でよい近似値をとる。
これと k が具体的に求められていないことから，

$(\alpha, \sin\alpha) = (\alpha, \alpha(1+k\alpha^2))$ とし，直線 $|F_B|$ $(0 \le \theta \le \alpha)$ を描けばよい。

(7)の別解より，$k=-\dfrac{1}{6}$ であるから，実際は，下のグラフとなる。



(9)

$2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g(1+k\alpha^2)}}$

解説

おもりは復元力を受けて運動する。

また，F_B をおもりに働く復元力としてよい。

よって，おもりの運動方程式は $ma = F_B$

$F_B = mg\theta(1+k\alpha^2)$ および $x = l\theta$ より，

$$F_B = -mg\frac{x}{l}(1+k\alpha^2)$$
$$= -\frac{mg(1+k\alpha^2)}{l}x$$

よって，おもりの運動方程式は，$ma = \dfrac{mg(1+k\alpha^2)}{l}x$

これは単振動運動の運動方程式 $ma = -Kx$ （x ：振動中心からの変位，K ：比例定数）を表しており，$\dfrac{mg(1+k\alpha^2)}{l}$ が K に相当する。

$ma = -Kx$ で与えられるときの振動の周期は $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$ だから，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg(1+k\alpha^2)}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(1+k\alpha^2)}}$$

$\boxed{2}$

〔**A**〕

(1) $B(a+l)x_{\mathrm{A}}$

解説

下図より，磁束がコイル内を貫く面積$=(a+l)x_{\mathrm{A}}\left[\mathrm{m}^2\right]$

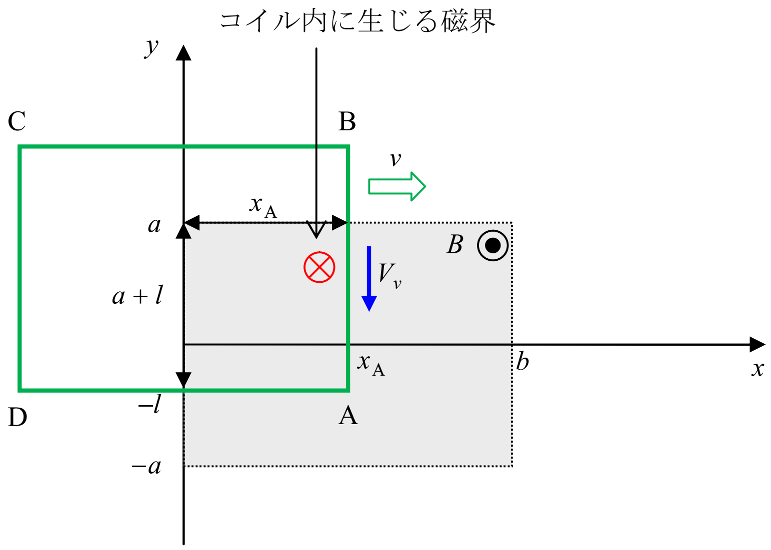
よって，コイル内を貫く磁束$=B\left[\mathrm{Wb/m}^2\right]\times(a+l)x_{\mathrm{A}}\left[\mathrm{m}^2\right]=B(a+l)x_{\mathrm{A}}[\mathrm{Wb}]$

(2) $-B(a+l)v$

解説

コイル内の外部磁界（z 軸正方向）の磁束が増加するから，
レンツの法則より，コイルに内に z 軸負方向の磁界が発生する。
これと右ねじの法則より，誘導起電力の向きは B→A，すなわち負の向きとなる。
よって，誘導起電力を V_v とすると，

$$
\begin{aligned}
V_v &= -\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| \\
&= -\left|\frac{B(a+l)\Delta x_{\mathrm{A}}}{\Delta t}\right| \\
&= -B(a+l)\left|\frac{\Delta x_{\mathrm{A}}}{\Delta t}\right| \\
&= -B(a+l)v
\end{aligned}
$$



(a)

(3) $-\dfrac{B(a+l)v}{R}$

解説

全抵抗$=R$，誘導起電力 $V_v = -B(a+l)v$

これとオームの法則より，誘導電流を I とすると，$I = -\dfrac{B(a+l)v}{R}$

（ア） x 軸負方向　（イ） y 軸正方向

解説

フレミングの左手の法則

(4) $\dfrac{B^2(a+l)^2 v}{R}$

解説

力（電磁力）の大きさを F とすると，

$$F = |IB(a+l)|$$
$$= \frac{B^2(a+l)^2 v}{R}$$

(5) $\dfrac{B^2(a+l)^2 vb}{R}$

解説

電磁力は，大きさが $\dfrac{B^2(a+l)^2 v}{R}$，向きが x 軸負方向であるから，

必要な外力は，大きさが $\dfrac{B^2(a+l)^2 v}{R}$，向きが x 軸正方向である。

コイルの変位は，大きさ b で x 軸正方向であるである。

よって，外力のベクトルとコイルの変位ベクトルの内積，

すなわち外力がする仕事は，$\dfrac{B^2(a+l)^2 v}{R}\cdot b\cdot\cos 0° = \dfrac{B^2(a+l)^2 vb}{R}$

(b)

(6) $-\dfrac{B(a+l)v+RI}{L}$

解説

コイルが移動し始めた瞬間

コイルの移動により発生した誘導起電力V_vによる磁界の磁束変化を打ち消すべく，コイルにはV_vと逆向きに自己誘導起電力が発生する。

したがって，自己誘導起電力をV_eとすると，V_vとV_eの正負の符号は逆である。

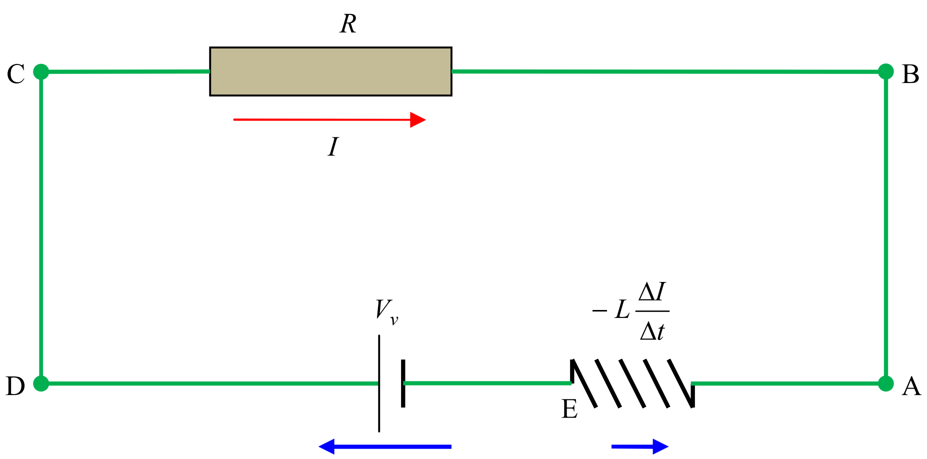
これと$V_v<0$より，微小時間の$\dfrac{\Delta I}{\Delta t}<0$より，$V_e>0$ $\therefore V_e=-L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$

よって，キルヒホッフの第 2 法則（起電力の和＝電位降下の和）より，

$V_v+\left(-L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}\right)=RI$ $\therefore \dfrac{\Delta I}{\Delta t}=\dfrac{V_v-RI}{L}$

これと$V_v=-B(a+l)v$より，$\dfrac{\Delta I}{\Delta t}=-\dfrac{B(a+l)v+RI}{L}$

コイルの回路を，たとえば，下図のようにデフォルメして考えればよい。



補足

$-L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$を電位降下と見なすと，

$V_v+\left(-L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}\right)=RI$は，$V_v=RI+L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ （$V_v, RI, L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$は同符号）と表せる。

つまり，$|V_v|$は，抵抗にかかる電圧とコイルにかかる電圧の和となる。

(7) $-\dfrac{B(a+l)v}{L}$

解説

$t=0$ のとき，$I=0$ より，$\dfrac{\Delta I}{\Delta t}=-\dfrac{B(a+l)v}{L}$

(8) $-\dfrac{B(a+l)v}{L}\Delta t$

解説

$t=0$ のとき，$I=0$，$\dfrac{\Delta I}{\Delta t}=-\dfrac{B(a+l)v}{L}$ より，

$$I+\Delta I=0+\left(-\frac{B(a+l)v}{L}\Delta t\right)=-\frac{B(a+l)v}{L}\Delta t$$

(9) $-IB(l+a)v\Delta t$

解説

電磁力は，$I<0$ より，大きさが $-IB(l+a)$，向きが x 軸負方向であるから，
必要な外力は，大きさが $-IB(l+a)$，向きが x 軸正方向である。
コイルの変位は，大きさが $v\Delta t$，向きが x 軸正方向である。
よって，外力のベクトルとコイルの変位ベクトルの内積，
すなわち外力がする仕事は，$-IB(l+a)\cdot v\Delta t\cdot\cos 0°=-IB(l+a)v\Delta t$

(10) $I^2R\Delta t$

解説

抵抗の消費電力＝I^2R [J/s] より，Δt [s] に発生する熱量は，$I^2R\Delta t$ [J]

(11) $LI\Delta I$

解説

コイルの磁気エネルギーが，$\dfrac{1}{2}LI^2$ から $\dfrac{1}{2}L(I+\Delta I)^2$ に変化するから，

蓄えられた磁気エネルギーは，$\dfrac{1}{2}L(I+\Delta I)^2-\dfrac{1}{2}LI^2=LI\Delta I+\dfrac{1}{2}L\Delta I^2$

ΔI の 2 次の項は考えないから，$LI\Delta I$

(12) $-\{B(a+l)v+RI\}I\Delta t$

解説

$\dfrac{\Delta I}{\Delta t}=-\dfrac{B(a+l)v+RI}{L}$ より，$\Delta I=-\dfrac{B(a+l)v+RI}{L}\Delta t$

これを $LI\Delta I$ に代入することにより，$-\{B(a+l)v+RI\}I\Delta t$

補足

外力の仕事＝コイルで発生する熱エネルギー＋コイルに蓄えられる磁気エネルギー

問 1

(8)より，電流 I は時間とともに大きくなっていくから，

I - t グラフの接線の傾きの近似値を表す $\dfrac{\Delta I}{\Delta t}=\dfrac{V_v-RI}{L}$ は，ゆるやかに小さくなっていき，

$x_A=b$ に達する前に $\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ が 0 と見なせるようになる，

つまり，$x_A=b$ に達する前に $V_v-RI=0$，すなわち $I=\dfrac{V_v}{R}$ と見なせるようになる。

$x_A=vt$ より，I - t グラフを I - x_A グラフにしてもグラフの概形は同じである。

よって，

$0\leq x_A\leq b$ のとき

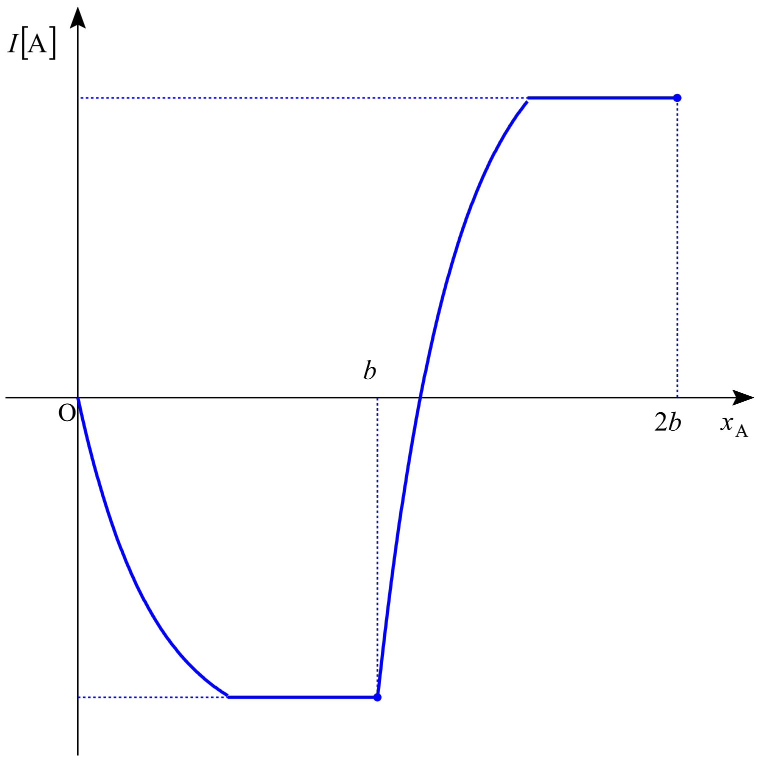
I - x_A グラフの接線の傾きがゆるやかになりながら I が 0 から減少していき，

$x_A=b$ に達する前に $I=\dfrac{V_v}{R}(<0)$ になる。

$b\leq x_A\leq 2b$ のとき

$V_v>0$ より，グラフの接線の傾きがゆるやかになりながら I が $\dfrac{V_v}{R}(<0)$ から増加していき，

$x_A=2b$ に達する前に $I=\dfrac{V_v}{R}(>0)$ になる。



補足

微分方程式を解いてみる。

$\dfrac{dI}{dt}=\dfrac{V_v-RI}{L}$ より，$\dfrac{dI}{V_v-RI}=\dfrac{dt}{L}$

積分定数を C とし，両辺を不定積分すると，$-\log\left|V_v-RI\right|=\dfrac{t}{L}+C$

$\therefore \left|V_v-RI\right|=e^{-\frac{t}{L}}\cdot e^{C}$

$\therefore V_v-RI=\pm e^{-\frac{t}{L}}\cdot e^{C}$

$0\le x_{\mathrm{A}}\le b$ のとき

$V_v<0$ より，$V_v-RI=-e^{-\frac{t}{L}}\cdot e^{C}$

$t=0$ のとき $I=0$ より，$V_v=-e^{C}$

よって，$V_v-RI=V_v\cdot e^{-\frac{t}{L}}$ $\quad\therefore I=\dfrac{V_v}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{L}}\right)$

$V_v=-B(a+l)v$ より，$I=-\dfrac{B(a+l)v}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{L}}\right)$

$x_{\mathrm{A}}=vt\left(0\le t\le\dfrac{b}{v}\right)$ より，$t=\dfrac{x_{\mathrm{A}}}{v}$

よって，$I=-\dfrac{B(a+l)v}{R}\left(1-e^{-\frac{x_{\mathrm{A}}}{vL}}\right)\ (0\le x_{\mathrm{A}}\le b)$

また，$-\dfrac{B(a+l)v}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{L}}\right)\xrightarrow{t\to\infty}-\dfrac{B(a+l)v}{R}$ より，

$x_{\mathrm{A}}=b$ に達する前に $I=-\dfrac{B(a+l)v}{R}$ と見なせるようになる。

$b\le x_{\mathrm{A}}\le 2b$ のとき

$V_v > 0$ より， $V_v - RI = e^{-\frac{t}{L}} \cdot e^C$

$t = \dfrac{b}{v}$ のとき $I \approx -\dfrac{V_v}{R}$ より， $V_v - R \cdot \left(-\dfrac{V_v}{R}\right) = e^{-\frac{b}{vL}} \cdot e^C$

$\therefore 2V_v = e^{-\frac{b}{vL}} \cdot e^C \quad \therefore e^C = 2V_v e^{\frac{b}{vL}}$

よって、$V_v - RI = 2V_v e^{\frac{b}{vL}} \cdot e^{-\frac{t}{L}} \quad \therefore I = \dfrac{V_v\left(1 - 2e^{\frac{b-vt}{vL}}\right)}{R}$

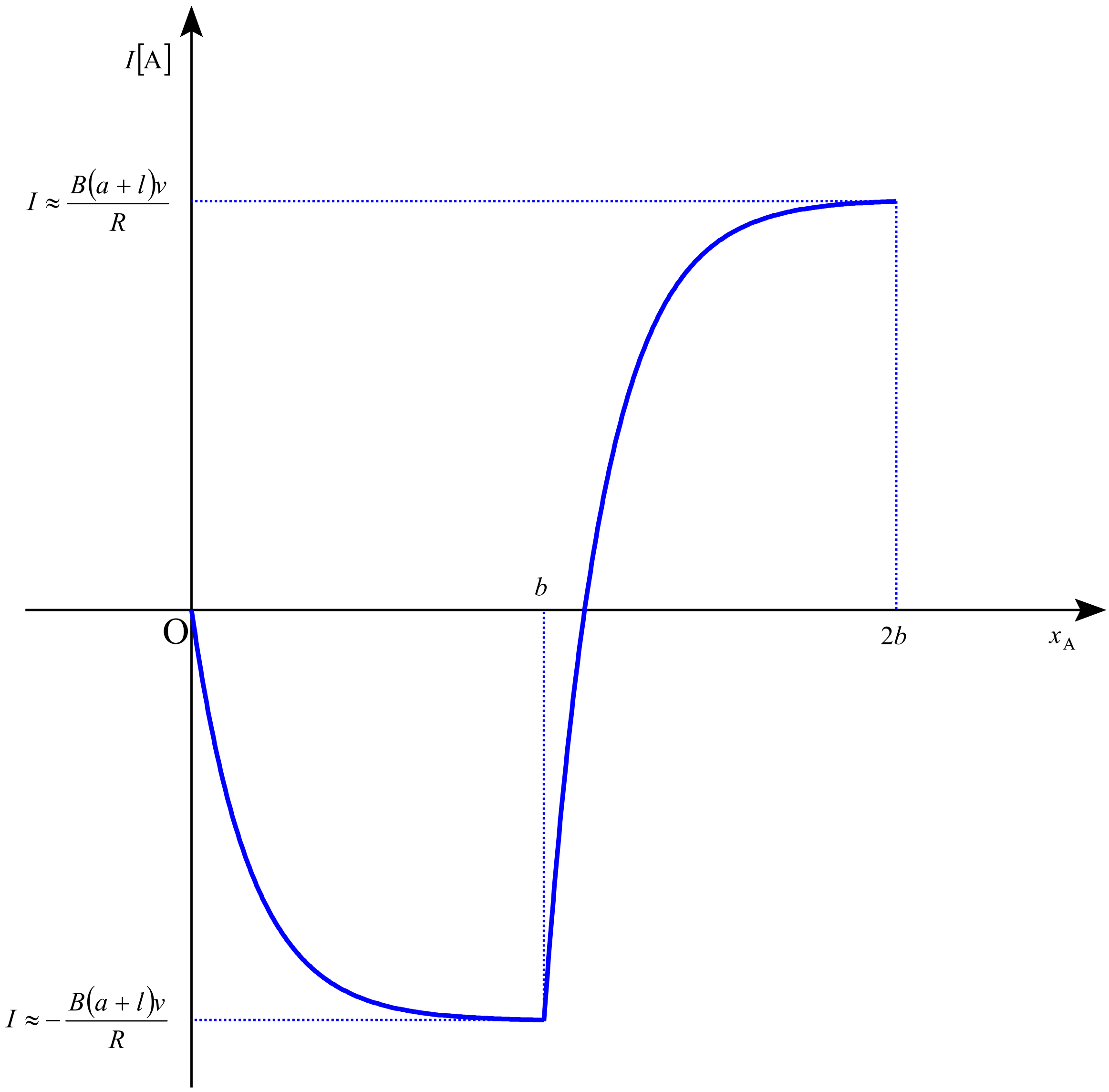
$V_v = -B(a+l)v$ より， $I = \dfrac{B(a+l)v}{R}\left(1 - 2e^{\frac{b-vt}{vL}}\right)$

$x_\mathrm{A} = vt \left(\dfrac{b}{v} \leq t \leq \dfrac{2b}{v}\right)$ より， $t = \dfrac{x_\mathrm{A}}{v}$

よって， $I = \dfrac{B(a+l)v}{R}\left(1 - 2e^{\frac{b-x_\mathrm{A}}{vL}}\right) \left(b \leq x_\mathrm{A} \leq 2b\right)$

また， $\dfrac{B(a+l)v}{R}\left(1 - 2e^{\frac{b-vt}{vL}}\right) \xrightarrow{t \to i} \dfrac{B(a+l)v}{R}$ より，

$x_\mathrm{A} = 2b$ に達する前に $I = \dfrac{B(a+l)v}{R}$ と見なせるようになる。



$I[\mathrm{A}]$
$I \approx \frac{B(a+l)v}{R}$
$I \approx -\frac{B(a+l)v}{R}$
O
b
$2b$
x_{A}

3

(1) $\dfrac{Q}{\Delta T}$

(2) $\dfrac{\Delta U}{\Delta T}$

解説

定積変化の熱力学第一法則（エネルギー保存則）より，

$Q = \Delta U = c_{\mathrm{V}} \Delta T$　・・・①

$\therefore c_{\mathrm{V}} = \dfrac{Q}{\Delta T} = \dfrac{\Delta U}{\Delta T}$

(3) $\dfrac{\Delta U + p\Delta V}{\Delta T}$

(4) $c_{\mathrm{V}} + R$

解説

定圧変化の熱力学第一法則（エネルギー保存則）より，

$Q' = \Delta U + p\Delta V = c_{\mathrm{P}} \Delta T$

$\therefore c_{\mathrm{P}} = \dfrac{\Delta U + p\Delta V}{\Delta T}$　・・・②

①，②より， $c_{\mathrm{P}} = \dfrac{c_{\mathrm{V}}\Delta T + p\Delta V}{\Delta T} = \dfrac{c_{\mathrm{V}}\Delta T + R\Delta T}{\Delta T} = c_{\mathrm{V}} + R$

$\because p\Delta V = p(V + \Delta V) - pV = R(T + \Delta T) - RT = R\Delta T$

(5) $\dfrac{5}{2}R$

解説

$\Delta U = U(T) - U(0) = \dfrac{5}{2}RT - 0 = \dfrac{5}{2}R\Delta T = c_{\mathrm{V}}\Delta T \quad \therefore c_{\mathrm{V}} = \dfrac{5}{2}R$

(6) $\Delta U = -\left(p + \dfrac{\Delta p}{2}\right)\Delta V$

解説

(p, V) から $(p + \Delta p, V + \Delta V)$ への変化が 1 次関数（直線）で表せるとすると，

平均の圧力 $= \dfrac{p + (p + \Delta p)}{2} = p + \dfrac{\Delta p}{2}$ より，断熱系がした仕事 $W = \left(p + \dfrac{\Delta p}{2}\right)\Delta V$

また，断熱変化の力学的第一法則より， $0 = \Delta U + W$

よって， $\Delta U = -W = -\left(p + \dfrac{\Delta p}{2}\right)\Delta V$

問題を解くための条件の記述が不足しているので，問題としてまずい気がする。

(7) $c_V \Delta T = -\left(p + \dfrac{\Delta p}{2}\right)\Delta V$

解説

$c_V = \dfrac{\Delta U}{\Delta T}$ より，$\Delta U = c_V \Delta T$

(8) $p\Delta V + V\Delta p$

解説

$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = R(T + \Delta T)$ ・・・③

$pV = RT$ ・・・④

③－④より，

$p\Delta V + V\Delta p + \Delta p\Delta V = R\Delta T$

$\Delta p\Delta V$ の項を無視することにより，$R\Delta T = p\Delta V + V\Delta p$

(9) $\dfrac{\Delta p}{\Delta V} = -\dfrac{c_P p}{c_V V}$

解説

$c_V \Delta T = -\left(p + \dfrac{\Delta p}{2}\right)\Delta V$ より，$c_V \Delta T = -p\Delta V - \dfrac{\Delta p\Delta V}{2}$

ここで，$\Delta p\Delta V$ の項を無視することにより，$c_V \Delta T = -p\Delta V$ ・・・⑤

$R\Delta T = p\Delta V + V\Delta p$，$R = c_P - c_V$ より，$(c_P - c_V)\Delta T = p\Delta V + V\Delta p$ ・・・⑥

$\dfrac{⑥}{⑤}$ より，$\dfrac{c_P - c_V}{c_V} = -\dfrac{p\Delta V + V\Delta p}{p\Delta V}$ $\therefore \dfrac{c_P}{c_V} - 1 = -1 - \dfrac{V\Delta p}{p\Delta V}$

よって，$\dfrac{\Delta p}{\Delta V} = -\dfrac{c_P p}{c_V V}$

(10) $\dfrac{m}{\rho}$

解説

$m = \rho V$ より，$V = \dfrac{m}{\rho}$

(11) $\dfrac{pm}{RT}$

解説

$pV = RT$，$V = \dfrac{m}{\rho}$ より，$\dfrac{pm}{\rho} = RT$ $\therefore \rho = \dfrac{pm}{RT}$

(12) $\rho g \Delta h$

解説

空気の密度が変化しないと仮定すると，

高さ h と $h-\Delta h$ の間にある底面積 S の空気の塊に働く浮力と重力のつり合いより，

$(p+\Delta p)S - pS = \rho S g \Delta h \quad \therefore \Delta p = \rho g \Delta h$

問題を解くための条件の記述が不足しているので，問題としてまずい気がする。

(13) $\dfrac{pmg}{RT}$

解説

$\Delta p = \rho g \Delta h$， $\rho = \dfrac{pm}{RT}$ より， $\dfrac{\Delta p}{\Delta h} = \dfrac{pmg}{RT}$

(14) $\dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{\Delta V}{V} + \dfrac{\Delta p}{p}$

解説

$R\Delta T = p\Delta V + V\Delta p$， $pV = RT$ より， $\dfrac{pV}{T}\Delta T = p\Delta V + V\Delta p \quad \therefore \dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{\Delta V}{V} + \dfrac{\Delta p}{p}$

別解

$(p+\Delta p)(V+\Delta V) = R(T+\Delta T)$ ・・・⑦

$pV = RT$ ・・・⑧

$\dfrac{⑦}{⑧}$ より， $\left(1+\dfrac{\Delta p}{p}\right)\left(1+\dfrac{\Delta V}{V}\right) = 1+\dfrac{\Delta T}{T} \quad \therefore \dfrac{\Delta V}{V} + \dfrac{\Delta p}{p} + \dfrac{\Delta p \Delta V}{pV} = \dfrac{\Delta T}{T}$

$\Delta p \Delta V$ の項を無視することにより， $\dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{\Delta V}{V} + \dfrac{\Delta p}{p}$

(15) $\dfrac{RT}{c_{\mathrm{P}} p}$

解説

$\dfrac{\Delta p}{\Delta V} = -\dfrac{c_{\mathrm{P}} p}{c_{\mathrm{V}} V}$ より， $\dfrac{\Delta V}{V} = -\dfrac{c_{\mathrm{V}} \Delta p}{c_{\mathrm{P}} p}$

よって，

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta p}{p} \Leftrightarrow \frac{\Delta T}{T} = -\frac{c_{\mathrm{V}} \Delta p}{c_{\mathrm{P}} p} + \frac{\Delta p}{p} \Leftrightarrow \frac{\Delta T}{\Delta p} = -\frac{c_{\mathrm{V}} T}{c_{\mathrm{P}} p} + \frac{T}{p} \Leftrightarrow \frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{(c_{\mathrm{P}} - c_{\mathrm{V}})T}{c_{\mathrm{P}} p}$$

$c_{\mathrm{P}} - c_{\mathrm{V}} = R$ より， $\dfrac{\Delta T}{\Delta p} = \dfrac{RT}{c_{\mathrm{P}} p}$

(16) $\dfrac{mg}{c_{\mathrm{P}}}$

解説

$\dfrac{\Delta p}{\Delta h}=\dfrac{pmg}{RT}$, $\dfrac{\Delta T}{\Delta p}=\dfrac{RT}{c_{\mathrm{P}}\,p}$ より, $\dfrac{\Delta p}{\Delta h}\cdot\dfrac{\Delta T}{\Delta p}=\dfrac{pmg}{RT}\cdot\dfrac{RT}{c_{\mathrm{P}}\,p}$ $\quad\therefore\dfrac{\Delta T}{\Delta h}=\dfrac{mg}{c_{\mathrm{P}}}$